[illegible]

$\boxed{1}$ Allgemeines (16P)

- $\underline{f}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{f}_2, \underline{f}_3, \dots, \underline{f}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$

  Wie lautet Gram'sche Matrix?

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 100 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 100 & 100 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

- Was für ein System?

  -> Frame, da singuläre Matrix $\underline{G}$. In $\underline{G}$ ist nur 1. Zeile von restlichen Zeilen verschieden. Ansonsten sind alle Zeilen identisch.

- Frame-Grenzen A & B angeben (mit Tipp, dass man sich das geometrisch überlegen soll)

- Charakterisiere $x(t) = e^{\alpha t^2}$ bzgl. Faktor α

  $\alpha = 0$: Leistungssignal

  $\alpha < 0$: Energiesignal

  $\alpha > 0$: Sonstiges Signal

  + Begründung

- Es sei $f(y|b)$ gegeben. Welcher Schätzer benutzen, wenn:

  - $f(b)$ bekannt -> MAP

  - $f(b)$ unbekannt -> ML

  Wann Map $\stackrel{!}{=}$ ML? -> $f(b)$ Gleichverteilung

- Hauptunterschied zw. STFT und WT?

- $F_x^\gamma(\tau,f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\exp(-j2\pi(f-f_0)\tau)\exp(-\pi^2(f-f_0)^2) + \exp(-j2\pi(f+f_0)\tau)\exp(-\pi^2(f+f_0)^2)\right]$ Spektrogramm $S_x^\gamma(\tau,f)$ angeben

- Hat das Spektrum Kreuzterme?

- Zu was für einem Signal gehört diese STFT?

  → Ich hab die Transformation umgestellt, um Faltung von Signalanteil & zeitverschobenem Fenster zu kriegen, dann invers fouriertransformiert & in Integralformel von STFT eingesetzt → $\cos(2\pi f_0 t)$ abgelesen

  $F_x^\gamma(\tau,f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\exp(-j2\pi(f-f_0)\tau)\exp(-\pi^2(f-f_0)^2) + \exp(-j2\pi(f+f_0)\tau)\exp(-\pi^2(f+f_0)^2)\right]$ | Umformung

  $= \boxed{\frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right)} * \boxed{\sqrt{\pi}\exp(-\pi^2 f^2)\exp(-j2\pi f\tau)}$ | inverse FT & Einsetzen in Formel für STFT, quasi $F_x^\gamma(\tau,f) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_f^{-1}\{F_x^\gamma(\tau,f)\}\exp(-j2\pi ft)dt$

  $= \int_{-\infty}^{\infty}\boxed{\cos(2\pi f_0 t)}\boxed{\exp(-(t-\tau)^2)}\exp(-j2\pi ft)dt$ | Ablesen

  $\gamma(t) = \exp(-t^2)$

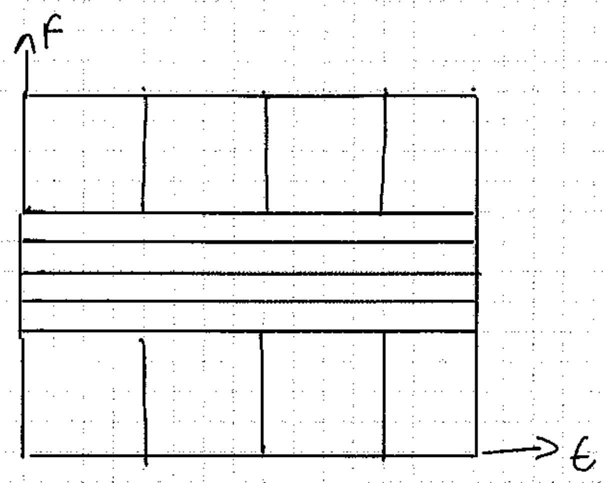
  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

  Evtl. war es auch möglich, ne ISTFT zu machen, ich fand diesen Weg intuitiver

- $\gamma(t) = e^{-t^2}$. Welches $\gamma^2(t)$ ist gültiges Fenster?

- Rekonstruktion fehlerfrei möglich?

1.5) Wavelet Transformation (‹'1#0')



- Filterbank für Rekonstruktion ?
  → Siehe Übung-9 Abbildung 5 / Auf. 3 a) iii)

- $$\psi(t) = e^{j2\pi f_0 t} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

  Zulässigkeitsbedingungen checken, für welche T ist $\psi(t)$ zulässig?

- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

  $\Psi(f) = \sqrt{2} / \pi^{1/4} e^{-\pi^2 f}$

  Wavelet-Transformation berechnen

  $\Rightarrow W_x^{\psi}(a, b) = \langle X(f), \Psi_{a,b}(f) \rangle_f = \ldots$

• WVV von zwei Komponentensignal

$z(t) = c_1 \cos(2\pi f_1 t) + c_2 \cos(2\pi f_2 t)$

→ siehe Vorlesung für Beispiel

• $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$

→ Wie lautet analytisches Signal? (Ohne Rechnung)

• Ambiguitätsfunktion

$$A_{xx}(\nu, \tau) = 1 + e^{j2\pi f_x \tau} + \cos\left(2\pi \frac{f_x}{2} \tau\right) \cdot \left[\delta(f - f_x) + \delta(f + f_x)\right]$$

1) Auto- und Kreuzterme kennzeichnen

→ Wie lassen sie sich unterdrücken?

2) Wie heißen diese Klassen?

• $W_{xx}(t,f) = \dots$ gegeben. Wie lautet $W_{x_i x_i}(t,f)$.

- $x_1(t) = x(t)\, e^{j2\pi f_x t}$
- $x_2(t) = \sqrt{\pi} \cdot x(t)$
- $x_3(t) = x(t) \cdot h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; W_{xx}(t,f) \underset{f}{*} W_{hh}(t,f)$

  $W_{hh}(t,f) = \delta(f - f_0)$
- $x_4(t) = x\left(\frac{t}{s}\right) \quad s > 1$

• Beweise $W_{x_a x_a}(t,f) = W_{xx}\left(\frac{t}{a}, af\right)$, wenn

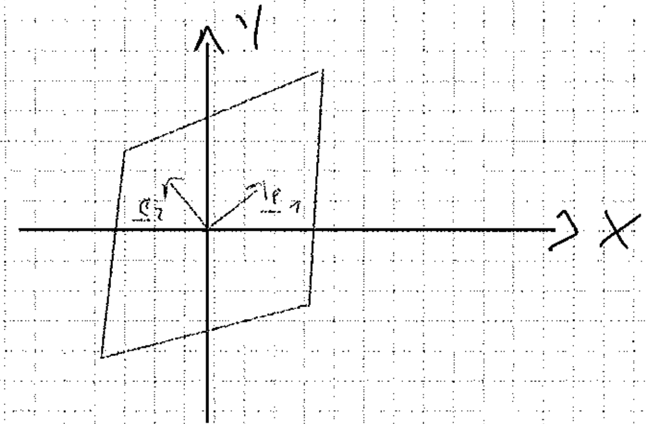
$x_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, x\left(\frac{t}{a}\right) \quad a > 1$

5) Hauptkomponentenanalyse (18 P)

$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5 \in \mathbb{R}^3$

- Schätze Kovarianzmatrix
- Bestimme EV, EW $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ waren gegeben.
- In welcher Hauptkomponente ist die Streuung am stärksten?
- Datenkompression mit dieser KLT? (1P)
- 2D Punktwolke → EV einzeichnen und $\underline{E}$ bestimmen (ohne Rechnung)

$\rightarrow E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$



- $\underline{y}_1 - \underline{y}_4$ gegeben, $\underline{\mu}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, bestimme Transformierte

$\underline{\tilde{y}} = \underline{E}^T (\underline{y} - \underline{\mu}_y)$

- Verteilung $f(R)$ einer Messung R gegeben

  N stochastisch unabhängige Messungen R_i, $i = 0, \dots, N-1$

  Erlang-Verteilung:

$$f(R) = \begin{cases} [\,]\,\frac{\lambda^n R^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda R} &, \text{für } R \geq 0 \\ 0 &, \text{sonst} \end{cases}$$

- ML-Schätzer berechnen.
- MAP-Schätzer berechnen. Nun war $f(\lambda)$ gegeben.
  λ ist Parameter von $f(R)$
- Erwartungstreue von ML- und MAP-Schätzer berechnen.
  -> ML: Ja
  MAP: Nein
- Wann MAP $\hat{=}$ Gauß-Markov?
- Wann MV $\hat{=}$ Least square?

=> Zur Übung rechne MSV-Übung 7 Aufgabe 5.
Gleiches Prinzip.
↳ Altklausuren von Mustererkennung (Beyerer) haben auch viele ML-Aufgaben, mit denen man üben kann, sind aber deutlich leichter

Prüfungsfragebogen zu

Prüfungsfach (bitte leserlich ;))
Methoden der Signalverarbeitung (MSV)

☐ mündlich ☒ schriftlich ☐ Nachprüfung

Datum: 29.03.2021 Prüfer: Bauer / Diaz Ocampo
Prüfungsdauer: 120 min Studiengang: ETIT

Vorbereitung

a) Regelmäßiger Besuch der Lehrveranstaltung? ☒ Ja ☐ Nein

b) Auswirkungen von a): ☐ Positiv ☒ Keine ☐ Negativ

c) Dauer der Vorbereitung: 9 Tage ☒ Alleine ☒ In der Gruppe

d) Vorkenntnisse aus anderen Fächern/Praxiserfahrung?
SuS, ORS, WT, NT

e) Welche Hilfsmittel wurden benutzt? (*Literatur, Internetseiten etc.*)
Buch
Wikipedia
Übungsfolien
Protokolle

f) Welche Tipps würdest du zur Vorbereitung geben?
Übungsaufgaben zwei mal durchrechnen, sehr gute Formelsammlung erstellen mit Verständnisfragen aus den Protokollen und wenn noch Platz ist Lösungen von Integralen (besonders bei STFT, WT & WV hilfreich)

Prüfung

a) Gab es Absprachen über Form oder Inhalt und wurden sie eingehalten?
Das Kapitel Hauptkomponentenanalyse wurde hinzugefügt, dafür weniger Kalman-Filter

b) Ratschläge zum Verhalten während der Prüfung:
Manche Aufgaben lohnen sich für ihre Punktzahl nicht. Erstmal Schema-Aufgaben und Verständnisfragen (Formelsammlung) beantworten.

c) Prüfungsstil: (*Atmosphäre, klare oder unklare Fragestellungen, Detailwissen oder Zusammenhänge, gezielte Zwischenfragen, Hilfestellung, gezielte Fragen bei Wissenslücken, ...?*)
Kampfrechnen mit ein paar Verständnisfragen

Verschiedenes

a) Welche Note hast du bekommen? (*natürlich optional*) 2,0

b) Empfandest du die Bewertung als angemessen? ☒ Ja ☐ Nein (*warum nicht?*) Durchfallquote nur 13 %

c) Kannst du die Prüfung weiterempfehlen? ☐ Ja (*wem besonders?*) ☒ Nein (*warum nicht?*)
Notendurchschnitt: 3,06

d) Hast du darüber hinaus Tipps und Bemerkungen auf Lager?

Inhalt der Prüfung: Bitte gib möglichst viele Fragen an. Wo wurden Herleitungen verlangt, und wo wurde nach Beweisen gefragt? (*Wenn der Platz nicht reicht kannst du auch gerne weitere Blätter verwenden. Am besten zusammengeheftet und durchnummeriert.*)

1. Allgemeines

- 2×3 Matrix gegeben, kann sie eine Gramsche Matrix sein?
- $\Phi_1 = \text{span}\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ mit $\varphi_1(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ und $\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ im Intervall $[-1, 1]$ gegeben: Gramsche Matrix bestimmen.
- Kann $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ in Φ_1 dargestellt werden?
- Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $e^{\alpha t^2}$ ein Energie- bzw. ein Leistungssignal?
- Was ist T_{eff}, F_{eff}, Formeln angeben
- Welchen Schätzer verwenden, wenn $f(t)$
  - bekannt
  - unbekannt

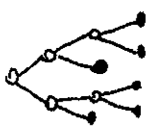
  Wann liefern beide Schätzer das gleiche Ergebnis?

2. Kurzzeit-Fouriertransformation

- Mehrere Fragen zur diskreten STFT!
- STFT von $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ mit $\gamma(t) = e^{-\beta t^2}$ bestimmen
- Zusammenhang zwischen $S_x^\gamma(\tau, f)$ und $F_x^\gamma(\tau, f)$ angeben, treten dabei Kreuzterme auf?
- Kann eine Rekonstruktion des Zeitsignals mit $\gamma(t) = e^{-\alpha|t|}$ und $\tilde{\gamma}(t) = e^{-\beta|t|}$, $\alpha, \beta > 0$ erfolgen?

3. Wavelet-Transformation

- Zulässigkeitsbedingungen des Haar-Wavelets prüfen
- $\Delta_t \cdot \Delta_f$ vom Haar-Wavelet berechnen ($\Psi(f)$, t_ψ und f_ψ waren gegeben)
- Gegeben war die Filterbank:



  → Welche Trafo ist das?
  → Zeit-Frequenz-Ebene zeichnen
- Frage zum Daubechies-Filter (nur 1 Punkt)

4. Wigner-Ville-Verteilung

- WVV von $x(t) = e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_2 t}$ rechnerisch bestimmen und Auto- bzw. Kreuzterme angeben
- Affininvarianz der WVV nachweisen
- Gegeben war $y(t)$ mit seiner $W_{yy}(t, f)$: mithilfe der Translationsinvarianz (unter Anderem) "ähnliche" Signale zu $y(t)$ bestimmen wie z.B. $y'(t) = e^{j\pi\alpha} y(t)$, $y'(t) = j\, y(t)$, usw.
- A_{zz} von $z(t) = 1 + e^{j2\pi f_0 t}$ gegeben, bei welchen Zeit- bzw. Frequenzverschiebungen liegen die Auto- bzw. Kreuzterme? Wie bestimmt man $W_{zz}(t, f)$ bei gegebener A_{zz}?
- Formel zur Rücktransformation der WVV angeben!
- Vor- und Nachteile der WVV, wie lassen sich die Nachteile (Kreuzterme) beheben? → (Tiefpasskern, Cohen)

5. Hauptkomponentenanalyse

- Unsymmetrische C_{xx} gegeben, ist das überhaupt möglich?
- C_{xx} schätzen für gegebene $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}^2$
- V_1, V_2 von C_{xx} berechnen
- Welche der beiden Hauptkomponenten weist eine höhere Varianz auf?
- Zusammenhang zwischen der Hauptkomponentenanalyse und der Datenkompression angeben
- $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}^2$ gegeben → Einzeichnen

  → V_1, V_2 einzeichnen
- obige Transformation durchführen
- Wo landen die $\vec{V}_1$ und $\vec{V}_2$? (nach Trafo)

6. Kalman-Filter

System gegeben $\begin{cases} x_{n+1} = a\, x_n + 2 v_n + v_n \\ y_n = \frac{2}{3} x_n + w_n \end{cases}$

- Für welche a ist das System stabil?
- Welche Eigenschaften müssen v_n und w_n aufweisen, damit man den Kalman-Filter benutzen kann?
- System und Kalman-Filter zeichnen
- K_n für $n = 1, 2$ berechnen, mit $a = \frac{1}{3}$ & $Q_n = R_n = 1$ ($\hat{P}_0$ war gegeben). Grenzwert angeben.
- Was passiert mit K, wenn Messrauschen groß?
- Was passiert mit K, wenn auch zusätzlich Systemrauschen?

VIEL ERFOLG!

Vielen Dank für deine Bemühungen! **Deine Kommilitoninnen und Kommilitonen.**

Prüfungsfragebogen zu

Prüfungsfach (bitte leserlich ;))
Methoden der Signalverarbeitung

☐ mündlich ☑ schriftlich ☐ Nachprüfung

Datum: 29.03.2021
Prüfungsdauer: 2h
Prüfer: Bauer/Schwär
Studiengang: ETEC Master

Vorbereitung

a) Regelmäßiger Besuch der Lehrveranstaltung? ☐ Ja ☑ Nein

b) Auswirkungen von a): ☐ Positiv ☑ Keine ☐ Negativ

c) Dauer der Vorbereitung: ☐ Alleine ☐ In der Gruppe

d) Vorkenntnisse aus anderen Fächern/Praxiserfahrung?
SuS

e) Welche Hilfsmittel wurden benutzt? (*Literatur, Internetseiten etc.*)
Bücher (SuS und Signalverarbeitung), Gedächtnisprotokolle, Übungen

f) Welche Tipps würdest du zur Vorbereitung geben?
WVVs in der Formelsammlung schreiben, selbst Aufgaben ausdenken für Ambiguitätsfunktion und WVV

Prüfung

a) Gab es Absprachen über Form oder Inhalt und wurden sie eingehalten?
Nein

b) Ratschläge zum Verhalten während der Prüfung:
Schnell schnell schnell

c) Prüfungsstil: (*Atmosphäre, klare oder unklare Fragestellungen, Detailwissen oder Zusammenhänge, gezielte Zwischenfragen, Hilfestellung, gezielte Fragen bei Wissenslücken, ...?*)

Verschiedenes

a) Welche Note hast du bekommen? (*natürlich optional*)

b) Empfandest du die Bewertung als angemessen? ☐ Ja ☐ Nein (*warum nicht?*)

c) Kannst du die Prüfung weiterempfehlen? ☐ Ja (*wem besonders?*) ☐ Nein (*warum nicht?*)

d) Hast du darüber hinaus Tipps und Bemerkungen auf Lager?

1\. a) Gegeben: $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Kann G eine Basis sein?

Nein, G müsste dafür quadratisch sein

b) Gegeben: $\varphi_1(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, $\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t \in [-1, 1]$

Stellen Sie G auf.

$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 1 - \frac{\sin(4\pi f_0)}{4\pi f_0}$, $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$, $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 1$

$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sin(4\pi f_0)}{4\pi f_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Geben Sie eine Frequenz f_0 an, für die G zu einer orthonormalen Basis wird.

z.B. $f_0 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\sin(0)}{4\pi f_0} = 1 \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Orthonormal, da G zur Einheitsmatrix wird

d) Kann die Funktion $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $t \in [-1, 1]$, durch diese Basis dargestellt werden?

e) Gegeben: $x(t) = e^{\alpha t^2}$ (nicht $-\alpha t^2$)
Für welche α ist $x(t)$ ein Energie- bzw. Leistungssignal?

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\alpha t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(-\alpha)t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \quad \text{für } \alpha < 0$$

(Formelsammlung)

$\Rightarrow$ Energiesig. für $\alpha < 0$, sonst Leistungssig.

(Habe so gemacht, weil ich nicht genug Zeit hatte die Integral auszurechnen. Weiß nicht ob es stimmt)

f) Was sind andere Definitionen von Δt und Δf? (Es war anders formuliert, habe leider vergessen...)

c) Die Wkeitsverteilung der Störgröße eines Systems ist bekannt. Welcher Schätzer eignet sich, wenn die Wkeitsverteilung des Parametervektors:

① bekannt
② nicht bekannt

ist! In welchem Fall sind beide Schätzer gleich?

2\. a) Ein Signal soll mit $f_A = 500\,\text{kHz}$ gequantet und abgetastet werden. Die Auflösung soll dabei 2 Hz sein. Wie viele Sample N_γ braucht man dafür? Was ist dafür die Fensterlänge T_γ?

$\Delta f = \frac{f_A}{N} \Rightarrow N = 250 \cdot 10^3$ Werte $\Rightarrow T_\gamma = N_\gamma \cdot t_A = \frac{N_\gamma}{f_A} = 0{,}5$ (?? I don't know)

b) Die Fensterfunktion lautet $\gamma(t) = c_1 \cdot e^{-\beta t^2}$. Bestimmen Sie c_1 so dass Energieerhaltung blabla.

$E_\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} c_1^2 e^{-2\beta t^2} dt = c_1^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c_1 = \left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$

c) Bestimmen Sie Δf und Δt.

d) $f(f|t) \sim \mathcal{N}$, $P(f \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) = 99\,\%$

Mit der oben berechneten Bandbreite sollte man die Wkeit von irgendwas berechnen. Hier war ich absolut ahnungslos

e) STFT berechnen: $x(t) = \cos(6\pi f_0 t)$, $\gamma(t) = c_2 \cdot e^{-\beta t^2}$ (mit allgemeinem c_2)

$F_x^\gamma(\tau, f) = \mathcal{F}_t\{\cos(6\pi f_0 t) \cdot c_2 e^{-\beta(t-\tau)^2}\} = \frac{1}{2}\left(\delta(f+3f_0) + \delta(f-3f_0)\right) * c_2 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{\pi^2}{\beta} f^2} e^{-j2\pi f \tau}$

$= \frac{c_2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left(e^{-\frac{\pi^2}{\beta}(f+3f_0)^2} e^{-j2\pi(f+3f_0)\tau} + e^{-\frac{\pi^2}{\beta}(f-3f_0)^2} e^{-j2\pi(f-3f_0)\tau}\right)$

f) Ein Signal wird mit STFT analysiert. Dabei ist die Analysefunktion $\gamma(t) = e^{-\alpha|t|}$ und die Synthesefunktion $\tilde{\gamma}(t) = e^{-\beta|t|}$. Ist eine Rekonstruktion möglich? Falls nicht, wie unterscheiden sich das ursprüngliche und das rekonstruierte Signal?

Hier habe ich nicht verstanden was sie wollten... Habe einfach gesagt, eine Rekonstruktion ist möglich falls $\langle \gamma(t), \tilde{\gamma}(t) \rangle = 1$ gilt

3. WVV

a) WVV von $x(t) = c_1 e^{j2\pi f_1 t} + c_2 \cdot e^{j2\pi f_2 t}$ bestimmen. Auto-/Kreuzterme markieren.

Aus dem SuS Buch: $W_{xx}(t,f) = \overbrace{c_1^2 \delta(f-f_1) + c_2^2 \delta(f-f_2)}^{\text{Autoterm}} +$

Beispiel 10.24

$$\underbrace{c_1 \cdot c_2 \cdot \delta\left(f - \frac{f_1+f_2}{2}\right) \cdot 2\cos(2\pi(f_1-f_2)t)}_{\text{Kreuzterm}}$$

b) Gegeben: $z(t) = 1 + e^{j2\pi f_0 t}$

$A_{zz}(\tau,\theta) = \ldots$ (war gegeben)

Wo (bez. θ und τ) liegen jeweils die Auto- und Kreuzterme? Wie kann man aus $A_{zz}(\tau,\theta)$ die WV ermitteln?

konnte man in der A_{zz} ablesen

Autoterme im Ursprung ($\theta = 0$), Kreuzterme außerhalb ($\theta = f_0$ und $\theta = -f_0$)

WVV: $W_{zz}(t,f) = \mathcal{F}_\tau\{\mathcal{F}_\theta\{A_{zz}(\tau,\theta)\}\}$

c) Wie kann man $z(t)$ aus $W_{zz}(t,f)$ rekonstruieren? Worauf muss man dabei achten?

$\tilde{z}(\tau) = z(\tau) \cdot z^*(0) = \ldots$

$$\hat{z}(t) = \frac{\tilde{z}(t)}{|z(0)|} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W_{zz}\left(\frac{t}{2}, f\right) e^{j2\pi f t} df}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} W_{zz}(0,f)\, df}}$$

(s. Übung oder Buch)

d) Vor- und Nachteile WV gegenüber STFT. Wie kann man die Nachteile „beheben" (jeweils Name und Ansatz!)?

e) Gegeben: $y(t) = e^{-\alpha t^2}$, $W_{yy}(t,f) = \ldots$ (war gegeben)

Wie lassen sich die WVVs der folgenden Funktionen aus der von $y(t)$ herleiten?

$y_1(t) = j \cdot e^{j2\pi\alpha} \cdot e^{-\alpha t^2}$

$y_2(t) = -e^{-\alpha t^2}$

$y_3(t) = \ldots ?$

$y_4(t) = c_1 \cdot e^{-\beta(t-\pi)^2}$

y_1, y_2 und y_3 unterscheiden sich von y nur in Phase:

$y_1(t) = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi\alpha} \cdot y(t)$

$y_2(t) = e^{j\pi} \cdot y(t)$

$y_3(t)$ war auch irgendwie so

Da Funktionen, die sich nur in Phase unterscheiden, die gleiche WV haben, gilt: $W_{y_1y_1} = W_{y_2y_2} = W_{y_3y_3} = W_{yy}$

Für y_4: $y_4(t) = c_1 \cdot y(t-\pi) \Rightarrow W_{y_4y_4}(t,f) = c_1^2 \cdot W_{yy}(t-\pi, f)$

4. Wavelet

a) Herleitung: $x_s = x\left(\frac{t}{s}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ W^{\psi}_{x_s}(a,b) = \sqrt{s}\cdot W^{\psi}_{x}\left(\frac{a}{s},\frac{b}{s}\right)$

b) Welches Wavelet hat Filterlänge 2?

c) Gegeben: Haar-Wavelet

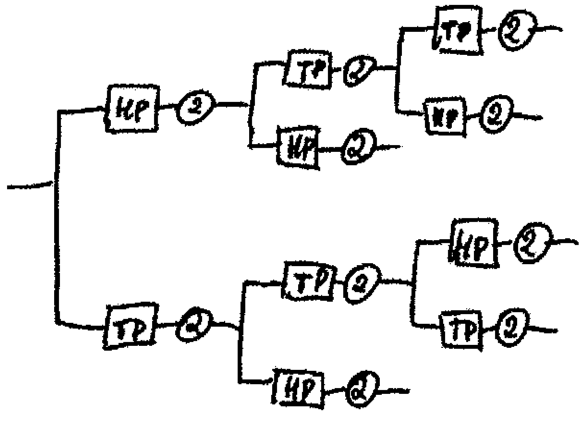
Welche Zulässigkeitsbedingungen werden hier erfüllt?

d) Gegeben: Haar-Wavelet $\psi(t)$ und ihre Transformierte $\Psi(f)$

Auch t_ψ und f_ψ

Berechnen Sie die Zeitdauer und die Bandbreite.

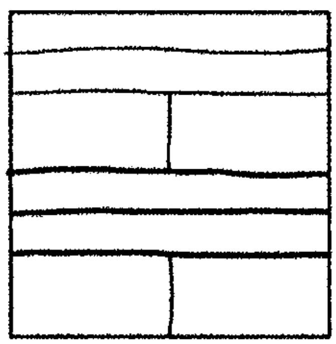
Für die nächsten Teilaufgaben wurde gegeben:



d) Um was für eine Zeit-Frequenz-Analyse handelt es sich und warum?

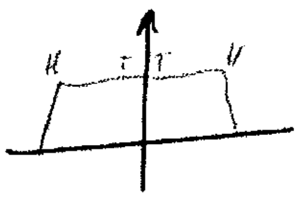
Wavelet-Paket, da vollständiger Baum

e) Zeichnen Sie die Zeit-Frequenz-Ebene.



f) Warum werden TP und HP vertauscht in der oberen Hälfte?
Erklärung mittels Zeichnung!

S. Vorlesung / Buch:



⟹ ...

5. Hauptkomponentenanalyse

a) Gegeben: $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Kann P eine Kovarianzmatrix sein?

Nein, weil es nicht symmetrisch ist.

b) Gegeben: 5 Beobachtungsvektoren

$X_1 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schätzen Sie die Kovarianzmatrix C_{XX}.

$C_{XX} \approx \frac{1}{M} (X-\mu_X)(X-\mu_X)^T$, $\mu_X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $C_{XX} = \ldots$

c) Bestimmen Sie die Basisvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ für die KL-Transformation.

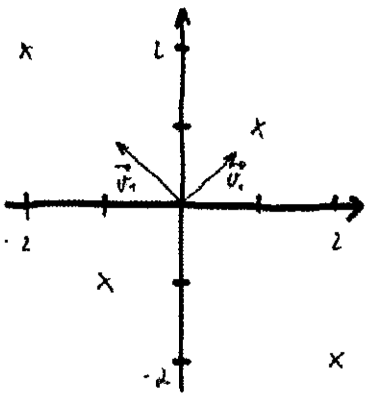
Eigenwerte und daraus Eigenvektoren berechnen. Glaub ich hatte:

$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) Gegeben: 4 Beobachtungen

$$y_1 = \begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix},\ y_2 = \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix},\ y_3 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ y_4 = \begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Basisvektoren der Hauptkomponentenanalyse <u>graphisch</u> (Koordinatensystem war gegeben). Bestimmen Sie daraus V.



$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

e) Transformieren Sie die Beobachtungen Y.

$$\tilde{Y} = V^T \cdot (Y - \mu_Y) \Rightarrow Y = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & -2\end{pmatrix},\ \mu_Y = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$V^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{Y} = \begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & 0 & -2\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

f) Wenn man die transformierten Werte $\tilde{Y}$ nochmal transformieren würde, was wären die Basisvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$?

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, da bei der ersten Transformation die Werten auf die x-y-Achsen projiziert wurden

6. Kalman-Filter

Gegeben: $x_{n+1} = a \cdot x_n + 2u_n + v_n$

$y_n = \frac{2}{3} x_n + w_n$

a) Stabilität?

(Meine Vermutung:) $x_{n+1} = a x_n + 2u_n \overset{z}{\circ\!\!-\!\!\bullet} z \cdot X(z) = a X(z) + 2U(z)$

$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{2}{z-a}$ ⇒ Stabil, wenn Pol innerhalb Einheitskreis

⇒ $|a| < 1$

b) Wie werden Rauschstörungen im Kalman-Filter modelliert? Was muss dabei gelten?

w_n: Messrauschen, v_n: Systemrauschen ⇒ beide weiß und normalverteilt

$E\{w_n\} = 0$, $E\{w_n \cdot w_m^T\} = R_n \cdot \delta_{n-m}$

$E\{v_n\} = 0$, $E\{v_n \cdot v_m^T\} = Q_n \cdot \delta_{n-m}$

$E\{w_n \cdot v_m^T\} = 0 \ \forall m,n$

Es gilt: $a = \frac{1}{3}$, $Q_n = 1$, $R_n = 1$

c) Rekursionsgleichungen aufstellen, Werte einsetzen, System mit Filter zeichnen und dabei das Kalman-Filter kennzeichnen.

$$x^*_{n+1} = \frac{1}{3}\hat{x}_n + 2u_n \quad , \quad P^*_{n+1} = \frac{1}{9}\hat{P}_n + 1$$

$$\hat{x}_{n+1} = x^*_{n+1} + K_{n+1}\left(y_{n+1} - \frac{2}{3}x^*_{n+1}\right)$$

$$\hat{P}_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{3}K_{n+1}\right) \cdot P^*_{n+1}$$

$$K_{n+1} = \frac{\frac{2}{3}P^*_{n+1}}{\frac{4}{9}P^*_{n+1} + 1}$$

d) Es gilt $\hat{P}_0 = 9$. Berechnen Sie K_n für $n = 1, 2$

$$P^*_1 = \frac{1}{9}\hat{P}_0 + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{K_1 = \frac{\frac{2}{3}P^*_1}{\frac{4}{9}P^*_1 + 1} \cong 0{,}706} \Rightarrow$$

$$\hat{P}_1 = \left(1 - \frac{2}{3}K_1\right) \cdot P^*_1 \cong 1{,}0587$$

$$P^*_2 = \frac{1}{9}\hat{P}_1 + 1 \cong 1{,}118 \Rightarrow \boxed{K_2 \cong 0{,}498}$$

e) Es gilt $R_n >> Q_n$. Welchen Wert nimmt K_n an und welcher Schätzwert wird geliefert?

$$K_n \approx 0 \,,\quad \hat{x}_{n+1} = A_n \hat{x}_n + B_n u_n$$

f) Es gilt $Q_n = R_n >> P$ (Beide Rauschen sind sehr groß). Welchen Wert nimmt K_n an und welcher Schätzwert wird geliefert?

Prüfungsfragebogen zu

Prüfungsfach (bitte leserlich ;))
Methoden der Signalverarbeitung

- ○ mündlich
- ⊗ schriftlich
- ○ Nachprüfung

Datum: 19.02.20
Prüfungsdauer:

Prüfer: Puente und Schwär
Studiengang: ETIT

Vorbereitung

a) Regelmäßiger Besuch der Lehrveranstaltung? ⊗ Ja ○ Nein

b) Auswirkungen von a): ⊗ Positiv ○ Keine ○ Negativ

c) Dauer der Vorbereitung: ⊗ Alleine ⊗ In der Gruppe 20 h

d) Vorkenntnisse aus anderen Fächern/Praxiserfahrung?

SuS, HM

e) Welche Hilfsmittel wurden benutzt? (*Literatur, Internetseiten etc.*)

- SuS-Buch
- Folien
- Übung

f) Welche Tipps würdest du zur Vorbereitung geben?

- schnelles Rechnen üben

Prüfung

a) Gab es Absprachen über Form oder Inhalt und wurden sie eingehalten?

b) Ratschläge zum Verhalten während der Prüfung:

nicht lange bei etwas aufhalten

c) Prüfungsstil: (*Atmosphäre, klare oder unklare Fragestellungen, Detailwissen oder Zusammenhänge, gezielte Zwischenfragen, Hilfestellung, gezielte Fragen bei Wissenslücken, … ?*)

Verschiedenes

a) Welche Note hast du bekommen? (*natürlich optional*)

b) Empfandest du die Bewertung als angemessen? ○ Ja ○ Nein (*warum nicht?*)

c) Kannst du die Prüfung weiterempfehlen? ○ Ja (*wem besonders?*) ○ Nein (*warum nicht?*)

d) Hast du darüber hinaus Tipps und Bemerkungen auf Lager?

Inhalt der Prüfung: Bitte gib möglichst viele Fragen an. Wo wurden Herleitungen verlangt, und wo wurde nach Beweisen gefragt? (*Wenn der Platz nicht reicht kannst du auch gerne weitere Blätter verwenden. Am besten zusammengeheftet und durchnummeriert.*)

Aufgabe 1 Allg. Fragen

$\varphi_1 = \frac{1}{2}$ $\varphi_2 = t$ auf $[-1,1]$

a) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix.

b) Um was handelt es sich? Begründung.

c) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_2.

) Nennen Sie ein Bsp. für ein Leistungssignal und begründen Sie, warum.

) Ist $x(t) = e^{-\alpha t^2}$ ein Energiesignal?

) Ändert sich das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt bei Skalierung eines Signals um a?

) Was ist das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt von $x(t) = e^{-\alpha t^2}$?

) Was hat die beste Zeit-Frequenzauflösung für $\delta(t)$?

) Was sagt $0 < A \|x(t)\|^2 \leq \sum_{i=-\infty} |a_i|^2 \leq B \cdot \|x(t)\|^2 < \infty$?

Aufgabe 2 Kurzzeit-Fourier-Transformation

$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ $\gamma(t) = c_1 e^{-\beta t^2}$

) Bestimmen Sie die Kurzzeitfourier-Transformation.

) Skizzieren Sie in der Frequenz-Zeit-Ebene.

) Bestimmen Sie c_1 so, dass $E_{\gamma\gamma} = |\gamma(t)|^2 = 1$.
Warum ist diese Normierung sinnvoll?

) $\tilde{\gamma}(t) = c_1 \cdot e^{-2\beta t^2}$ Wie verändert sich die Kurzzeit-Fourier-Trafo?

) $\gamma_s(t) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-2\beta t^2}$ Ist das ein zulässiges Synthesewavelet?

Vielen Dank für deine Bemühungen! **Deine Kommilitoninnen und Kommilitonen.**

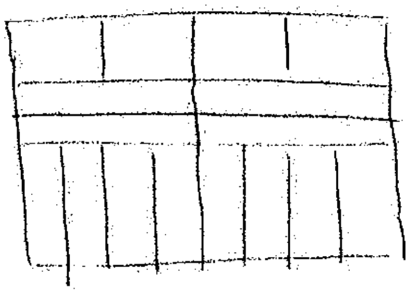
Aufgabe 3 Wavelet-Transformation

a) Nennen Sie den wesentlichen Unterschied zwischen der Kurzzeit-Fourier-Trafo und der Wavelet-Trafo?

b) Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil gegenüber der Wigner-Ville-Verteilung.

c) Nennen Sie den Unterschied zwischen der diskreten Wavelet-Trafo und der Wavelet-Paket Trafo.

d) Zeichnen zur gegebenen Zeit-Frequenz-Aufteilung den Wavelet-Paket-Baum.



e) Zeigen Sie graphisch, warum TP und BP bei HP-Signalen vertauscht werden.

f)

$x_1(t) = e^{-\alpha t^2}$

$x_2(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

$x_3(t) =$ Gabor Wavelet

Ist jeweils die Zulässigkeitsbedingung erfüllt?

g) $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ $\psi(t)$: Gabor-Wavelet

Bestimmen Sie die Wavelet Transformation.

Hinweis: Transformierte des Gabor-Wavelets.

i) Bestimmen Sie die mittlere Zeit und Frequenz (ohne Rechnung).

Bestimmen Sie daraus die Zeit-Frequenz-Darstellung der Wavelet-Trafo

Hinweis: Substitution gegeben

Aufgabe 4 Wigner-Ville-Verteilung

$x_1(t) = \cos(2\pi f_0 (t-t_0))$

1) Bestimmen Sie die Wigner-Ville-Verteilung. Auto- und Kreuzterme kennzeichnen

$x_2(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

2) Bestimmen Sie die Wigner-Ville-Verteilung

) Bestimmen Sie das analytische Signal von x_1 und geben Sie die Wigner-Ville-Verteilung (ohne Rechnung) an.

) Wie heißt der Zusammenhang zwischen Skalogramm und Wigner-Ville-Verteilung. Geben Sie die Formel an

) Bestimmen Sie die $x(t) = (1 + e^{j2\pi f_0 t})$ Ambiguitätsfkt. Bei welchen Frequenzen sind Kreuz- und Autoterme?

) Wie lassen sich Kreuzterme aus der Ambiguitätsfkt entfernen? Wie heißen diese?

Aufgabe 5 Parameterschätzung

Minimum-Varianz-Schätzer: Aufgabe aus Probeklausur (Kondensator $u(t) = u_0 \cdot e^{-\alpha t}, \dots$)
→ ein. Signalmodell aufstellen
→ Schätzwert u_0 mittels MV-Schätzer

Bayes-Schätzung: gegeben: $f(x)$ $\quad y_i = x_i + M$

→ bestimme $\ln(f(y|M))$
→ bestimme Schätzwert für $N=1$
→ Welcher Schätzer verwenden, falls $f(M)$ bekannt

Aufgabe 6 Hauptkomponentenanalyse

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix C_{xx}

) Diagonalisieren Sie die Kovarianzmatrix, sodass $C_{xx} = E \Lambda E^T$, $EE^T = I$ mit $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$

) Vektor mit maximaler Varianz

) [illegible]